**Ге**

**Геометрия углы**



прямой острый тупой развернутый

***Прямой*** – угол, равный ***90°***,

***Острый*** – угол, меньший ***90°***,

***Тупой угол*** – угол от ***90°*** до ***180°***.

***Развернутый*** – угол, равный ***180°***.

***1 радиан*** – центральный угол, опирающийся на дугу, равную радиусу окружности.



***R***

***1***

радиан

***R***

***R***

***Смежные углы -*** углы, у которых одна сторона общая, а две другие лежат на одной прямой



***Углы при параллельных прямых и секущей***



***2***

***1***

***c 3***

***4***

***a***

***6***

***5***

***7***

***8***

***b***

***1 = 3*** - вертикальные углы равны

***3 = 5*** - накрест лежащие углы равны.

***2 = 6*** - соответственные углы равны

***2 + 3 = 180°*** - сумма смежных углов рав- на ***180°***.

***1 + 6 = 180°*** - сумма односторонних углов

равна ***180°***.

***Внешний угол треугольника*** – угол, смежный с

***C*** одним из углов треугольника.



***α***

***φ***

***α + φ = 180°***

***sinφ = sinα; cosφ = -cosα; tgφ = -tgα φ = B + C***

Внешний угол треугольника равен сумме

***B A*** внутренних углов, не смежных с ним.

***Прямоугольный треугольник A***

***c***

Теорема Пифагора: ***c2 = a2 + b2 а*** и ***b*** – катеты, ***с*** – гипотенуза.

### b

***Часто встречающиеся пифагоровы тройки:***

### 3; 4; 5

***5; 12; 13***

### 7; 24; 25

***8; 15; 17***

### C a B

***Тригонометрия в прямоугольном треугольнике***

### sin А = a cos А = b tg А = a ctg А = b

***c***

***c***

***b***

***a***

***sin2 А + cos2 А = 1***

### tg2 А + 1 = 1

***cos2 А***

### ctg2 А + 1 = 1

***sin2 А***

### tg А ctg А = 1

***А + B = 90°***

### sin А= cos B cos А= sin B tg А= ctg B

***Высота в прямоугольном треугольнике ,проведенная из вершины прямого угла, де- лит его на два треугольника, подобных данному.***

### A



***cb***

***h***

***ca***

***b***

### C a B

***ABC ~ CBH ~ ACH***

### S ABC = c h = a b

***2 2***

***h2 = ca cb ; a2 =c ca ; b2=c cb***

Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника: ***R = c***

### 2

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник: ***r = a + b -c***

***2***

# «Особенные» треугольники

### A

***30°***

***2a***

***60°***

***A***

### a

***45°***

***a 2***

***45°***

***3***

***a***

### C a B C a B

***Сумма углов треугольника: А+ В + С = 180°***

***Неравенство треугольника:***

### c < a + b a < b + c b < a + c

***Формулы площади треугольника:***

### S = a h = 1

***a b sin С =***

### = p r = abc .

***2 2 4R***



***p (p - a) (p - b) (p - ссc)***

Здесь ***р = a + b + c*** – полупериметр, ***r*** – радиус вписанной окружности,

### 2

***R*** – радиус описанной окружности.

***Теорема синусов***

### a = b = c = 2R

***A c B***

### sin A sin B sin C

***Теорема косинусов C***

***c2 = a2 + b2 - 2ab cos C*** В треугольнике напротив большего

***b***

***a***

угла лежит большая сторона

***Правильный треугольник***

Высота правильного треугольника: ***h = a 3*** ;

### 2

Радиус окружности, описанной вокруг

***60°***

***a***

***R***

***0***

***r***

***a***

***h***

***60°***

***60°***

правильного треугольника: ***R = a 3*** ;

### 3

Радиус окружности, вписанной

в правильный треугольник: ***r =***

### a

***a 3*** ;

### 6

Площадь правильного треугольника: ***S = a2 3***

### 4

***Правильный шестиугольник***

***C Sпр.шестиугольника***

***H***

***a***

***60°***

***0***

***r***

***3a2 3***

### 4

***=***

***B D R = a*** – радиус описанной окружности,

***r = OH = a 3*** – радиус вписанной окружности,

***2***

***a СF = 2a*** – большая диагональ

***A E FD = a 3*** – диагональ.

#### Признаки равенства треугольников

***F*** По трем сторонам. Три стороны одного треугольника

соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

По углу и двум прилежащим к нему сторонам По стороне и двум прилежащим к ней углам.

#### Признаки подобия треугольников

По двум углам

По трем сторонам.

По углу и двум прилежащим к нему сторонам

***Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия***

***S2***

***S1***

***а1 а2***

***S1 : S2 = ( а1 : а2 )² = k²***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Элементы треугольника*** | | |
| ***Высота треугольника***  – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону. | ***B***  ***c***  ***A***  ***H***  ***b*** | Высоты треугольника пересекаются в одной точке.  В случае тупоугольного треугольника пересекаются продолжения высот. |
|  | ***C H***  ***A*** | Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту |
|  | ***C*** | ***S = a ha = b hb = c hc 2 2 2*** |
|  | ***B*** |  |
| ***Медиана треугольника*** – отрезок, соединяющий вершину треугольника  с серединой противоположной стороны. | ***B***  ***y x 2y***  ***2x M C*** | Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении ***2:1***, считая от  вершины. |
|  | ***A***  ***S S*** | Медиана треугольника делит его на два равных по площади треугольника. |
|  | ***A*** | Три медианы треугольника делят его на ***6*** равных по площади треугольников. |
|  | ***M***  ***C*** | Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы. |
|  | ***СМ = АМ = ВМ = R*** |  |



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Биссектриса треугольника*** делит угол треугольника пополам. | ***B***     1. ***P***     ***С***  ***С***  ***a***  ***b***   1. ***m***   ***n***  ***m a***  ***n = b A***  ***A***  ***45°***  ***С B*** | Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от сторон треугольника и является центром окружности, вписанной в треугольник.  Биссектриса треугольника делит противоположную сторону в отношении длин прилежащих сторон.  Острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника равен ***45°***. |
| ***Серединный перпендикуляр*** к стороне треугольника  – это множество точек, одинаково удаленных от ее концов. | ***B***  ***R***  ***0***  ***A R***  ***R***  ***C*** | Три серединных перпен- дикуляра к сторонам тре- угольника пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена от вершин треугольника и является центром окружности, описанной вокруг треугольника. |
| ***A***  ***B m***  ***a***  ***C*** | ***Средняя линия треугольника*** – отрезок, соединяющий середины его сторон.  Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.  ***m = a ; m* || *a***  ***2*** | |



# Четырехугольники

|  |  |
| --- | --- |
| ***Выпуклый*** | ***Невыпуклый*** |
| ***B***  ***C***  ***A***  ***D***  Сумма углов выпуклого четырехугольника равна ***360°***  ***А + B + C + D = 360°***  Площадь выпуклого четырехугольника  ***B***  ***d1 d2 C***  ***φ***  ***A***  ***D***  ***S = d1 d2 sinφ.***  ***2***  ***d1 и d2*** – диагонали.  Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма  ***B***  ***A***  ***C***  ***D*** | На практике: представляем как комбинацию треугольников и выпуклых четырехугольников. |

***Трапеция*** – четырехугольник, имеющий ровно одну пару параллельных сторон.

|  |  |
| --- | --- |
| ***B b C***  ***h***  ***A a D*** | ***BC* || *AD***;  ***BC*** и ***AD*** – основания, ***АВ*** и ***CD***– боко- вые стороны.  ***А + B = C + D = 180°***  ***Sтрап = a+b h***  ***2*** |
| ***B b C***  ***M N***  ***A a D*** | ***М*** – середина ***АВ***, ***N*** – середина ***CD***. ***MN*** – средняя линия трапеции.  ***MN* || *AD, MN* || *ВС,***  ***MN = a+b***  ***2*** |
| ***B b C P Q***  ***A a D*** | Отрезок, соединяющий середины диа- гоналей трапеции, равен полуразности оснований.  ***Р*** – середина ***АС***, ***Q*** – середина ***BD***.  ***PQ = a-b***  ***2*** |
| ***K***  ***B E C***  ***O***  ***A F D*** | ***K = (AB) (CD)***;  ***E*** - середина ***ВС***, ***F*** – середина ***АD***, ***O = AC BD***.  Замечательное свойство трапеции: середины оснований, точка пересечения диагоналей трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой. |

***Параллелограмм –*** четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.



***АВ* || *CD, AD* || *BC.***

|  |  |
| --- | --- |
| ***B C***  ***b h***  ***φ***  ***A a D***  ***S = a h = absinφ*** | Четырехугольник является параллелограммом, если его противоположные стороны параллельны и равны.  ***АВ* || *CD, АВ* = *CD ABCD*** –  параллелограмм. |
| ***B C***  ***b O***  ***A a D*** | Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.  ***АО = ОС, ВО = OD***. |
| ***B K C***    ***A F E D***  ***АK* || *CF, AK BE.*** | Биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны.  Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны.  Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.  ***АВ = АЕ, DF = CD.*** |

***Виды параллелограммов***

***B C***

***D***

Ромб



### B A

***a a***

Прямоугольник

### B C



***A C*** Квадрат

### a a

***d***



***D***

### a

***b***

### A a D



***Ромб***. Параллелограмм, у которого все стороны равны. Диагонали ромба перпендикулярны.

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

***Sромба = d1 d2*** , где ***d1*** и ***d2*** – диагонали.

***2***

***Прямоугольник***. Параллелограмм, все углы которого прямые. Диагонали прямоугольника равны.

***Sпрямоугольника = a b***

***Квадрат***. Ромб, все углы которого прямые. Другими словами: прямоугольник, у кото- рого все стороны равны.

# Окружность и круг

Число ***π*** равно отношению длины окружности к ее диаметру. ***π ≈ 3,14159...***

|  |  |
| --- | --- |
| ***R***  ***O***  ***D*** | ***L = 2πR*** – длина окружности  ***S = πR2*** – площадь круга  ***D = 2R*** – диаметр окружности |
| ***l φ R***  ***O*** | ***l дуги = α 2πR*** – длина дуги  ***360°***  ***Sсектора = α πR2*** – площадь сектора ***360°*** |
| ***A D***  ***O . E***  ***C B AE BE = CE DE*** | ***Хорда*** – отрезок, соединяющий две точки на окружности.  Произведения отрезков пересекающихся хорд равны. |
| ***A***  ***O. B*** | Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. |
| ***A***  ***O. M***  ***B MA* = *MB, OA MA*** | Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.  Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.  Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла. |
| ***C***  ***O.***  ***B A M*** | ***Теорема о секущей и касательной:*** Квадрат отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей.  ***МС2 = МА МВ*** |
| ***O1 RC. r O2*** | Внешнее касание окружностей:  ***О1О2 = R + r*** |
| ***O1 O2*** | Внутреннее касание окружностей:  ***О1О2 = R – r*** |

# Центральный и вписанный угол

|  |  |
| --- | --- |
| ***φ***  ***O.***  ***α***  ***α*** – центральный угол, ***φ*** – вписанный угол. ***φ = α/2*** | Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается.  Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.  Вписанные углы, опирающиеся на равные дуги или на одну и ту же дугу, равны.  Равные дуги стягиваются равными хордами. |
| ***O.*** | Вписанный угол, опирающийся на диаметр, - прямой. |
| ***C M***  ***O МС*** – касательная,  ***ВС*** – хорда.  ***B МСВ = 1 CB***  ***2*** | Угол между хордой и касательной, проведенной через конец этой хорды, равен половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла. |
| ***D B***  ***φ***  ***C***  ***A***  ***φ = AD + BC***  ***2*** | Угол между пересекающимися хордами равен полусумме заключенных между ними дуг. |
| ***B***  ***A***  ***φ M***  ***D C***  ***φ = BD - AC***  ***2*** | Угол между секущими (с вершиной вне окружности) равен полуразности угловых величин дуг, заключенных внутри угла. |

**Вписанные и описанные треугольники**

|  |  |
| --- | --- |
| ***B***  ***O***  ***A R***  ***C*** | Центр окружности, описанной вокруг треугольника - это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.  ***ОА = ОВ = ОС***  Центр описанной окружности равноудален от вершин треугольника.  ***AB = AC = BC = 2R***  ***sin С sin B sin A***  (теорема синусов)  ***S АВС = АВ ВС АС***  ***4R*** |
| ***B***    ***A r O***  ***C*** | Центр окружности, вписанной в треугольник - это точка пересечения биссектрис треугольника.  Центр вписанной окружности равноудален от сторон треугольника.  ***S АВС = p r*** , где ***p = АВ + ВС + АС***  ***2*** |

# Описанные и вписанные четырехугольники

|  |  |
| --- | --- |
| ***Описанный четырехугольник***  ***B b C***  ***a O c***  ***A d D***  ***a + c = b + d***  Окружность можно вписать в четырехугольник тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны. | ***Вписанный четырехугольник***  ***B***  ***O***  ***A C***  ***D***  ***A + C = B + D = 180°***  Окружность можно описать вокруг четырехугольника тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны ***180°*** |